۹ تیرماه ۱۴۰۰ | دانشگاه صنعتی شریف | ساعت ۳:۳۰ تا ۶:۳۰ عصر

دانشکده‌ی فیزیک

آزمون پایان‌ترمِ درس ترمودینامیک و مکانیک آماری ۳ (آزمونِ در خانه)

توجه:

۱. نام و نام خانوادگی و شماره‌ی دانشجویی‌تان را در صفحه‌ی اول پاسخ‌نامه بنویسید.

۲. تلاش کنید پاسخ‌ها را با خطی خوانا و نگارشی ساده بنویسید. طبیعی است که اگر پاسخی خوانا نباشد تصحیح نمی‌شود، و اعتراضی از این بابت پذیرفته نمی‌شود.

۳. فرض‌ها و نتیجه‌های فرعی را که در حل هر مسئله به کار می‌برید به‌روشنی بیان کنید. دقت کنید که اگر لازم باشد، بایستی اثبات یا دست‌ِکم طرح اثبات برخی از آن نتیجه‌ها را نیز بیاورید. پاسخ‌های بسیار فشرده یا تلگرافی با فرض‌های ضمنیِ غیرشفاف و بدون توضیح کافی نمره از دست می‌دهند. ملاکِ تصحیح و نمره‌دادن به یک پاسخ تنها آن چیزی است که در پاسخ‌نامه نوشته‌اید، و ادعاها و توضیحاتِ تکمیلیِ پس از آزمون وارد نیست. بنابراین توصیه می‌شود هر آن‌چه را که در پاسخ به یک مسئله در نظر داشته‌اید به‌روشنی و با شرحِ کافی بنویسید.

۴. همه‌ی مسئله‌ها هم‌نمره‌اند. تنها به ۲ مسئله به انتخاب خود پاسخ دهید (به‌جز این‌که انتخابِ تنها یکی از مسئله‌های دوم و سوم مُجاز است، نه انتخابِ هر دو). شماره‌ی این مسئله‌ها را در برگه‌ی اول پاسخ‌نامه بنویسید.

۵. استفاده از کتاب‌های درسی و درس‌نامه‌ها برای یادآوری مطالب یا فرمول‌های اصلی آزاد است، اما نباید پاسخ مسئله‌ای را از آن‌ها رونویسی یا اقتباس کرد. با توجه به این نکته، اگر از برخی از نتایجِ منابعی جز کتاب‌های درسیِ اصلی استفاده می‌کنید، به آن‌ها ارجاعِ مناسب بدهید (مثلاً نام مرجع و شماره‌ی صفحه). فرض بر این است که در پاسخ‌نامه‌تان نتیجه‌ی تفکر، تلاش، و محاسبات خودتان را می‌نویسید، نه رونوشتی از نتایجِ دیگران یا حاصلِ مشورت با آن‌ها را. همه‌ی دانشجویان ملزم به رعایت کاملِ اصول حرفه‌ای و آداب شرکت در آزمون‌های غیرحضوری هستند.

۶. نسخه‌ای الکترونیکی و تا حدِ ممکن کم‌حجم از پاسخ‌نامه‌تان را (به‌صورتِ تایپ‌شده یا دست‌نویسِ اِسکن‌شده‌ای در قالب یک فایلِ pdf) تا پیش از ساعت ۶:۳۰ عصر از آدرس ای‌میلِ رسمیِ دانشگاهی‌تان به آدرس ای‌میلِ من (rezakhani@sharif.edu) بفرستید. انتظار می‌رود که این فایل کیفیتِ قابلِ‌قبولی داشته‌باشد.

۷. تنها یک فایل از هر دانشجو پذیرفته می‌شود. لطفاً پاسخ‌نامه‌تان را چند بار نفرستید. در غیر این‌صورت، تنها اولین فایلی که از شما دریافت شده پذیرفته می‌شود.

۸. در برنامه‌ریزیِ زمانی برای آماده‌کردن و فرستادنِ فایلِ پاسخ‌نامه‌ها پیش‌بینی‌های لازم را بکنید تا مشکلاتِ تکنیکیِ احتمالی منجر به تاخیر نشود. در پنج دقیقه‌ی اولِ تاخیر پنج درصد و در ده دقیقه‌ی بعدی ده درصد از نمره‌ی کلِ این آزمون به‌عنوان جریمه کسر می‌شود. تاخیرِ بیش از پانزده دقیقه نیز به معنیِ تحویل‌ندادنِ برگه‌ی پاسخ‌نامه در نظر گرفته می‌شود.

۹. موعدِ تحویلِ برگه‌ی گزارش پروژه یا تحقیقِ ترمی (term paper) حداکثر تا دو روز پس از تاریخ آخرین آزمونِ این نیم‌سالِ تحصیلی است. توجه کنید که تحقیقِ ترمی حداکثر ۱ نمره‌ی اضافی دارد و طبعاً تحویلِ آن الزامی نیست. علاوه بر این، تحویلِ تحقیقِ ترمی به‌خودیِ‌خود نمره ندارد (این تحقیق بایستی کیفیتِ قابلِ‌قبولی هم داشته‌باشد).

۱۰. قاعده‌ی محاسبه‌ی نمره‌ی نهایی این است:

$$M+F+H+B+T,$$

که این‌جا M نمره‌ی آزمونِ میان‌ترم (از ۴ نمره)، F نمره‌ی آزمونِ پایان‌ترم (از ۸ نمره)، H نمره‌ی تمرین‌ها و تکلیف‌های درسی (از ۸ نمره)، B نمره‌ی تمرین‌های امتیازی (از ۲ نمره)، و T هم نمره‌ی تحقیقِ ترمی (از ۱ نمره) است؛ یعنی نمره‌ی نهایی از ۲۳ سنجیده می‌شود.

۱۱. تندرست و پیروز باشید.

—مسئله‌ی اول:

9.5 Consider the grand partition function

$$\mathscr{Q}(z,V) = (1+z)^V(1+z^{\alpha V})$$

where α is a positive constant.

(*a*) Write down the equation of state in a parametric form, eliminate z graphically, and show that there is a first-order phase transition. Find the specific volumes of the two phases.

(*b*) Find the roots of $\mathscr{Q}(z,V)=0$ in the complex z plane, at fixed V. Show that as $V\to\infty$ the roots converge toward the real axis at $z=1$.

(*c*) Find the equation of state in the "gas" phase. Show that a continuation of this equation beyond the phase-transition density fails to show any sign of the transition. This will demonstrate that the order of the operations $z(\partial/\partial z)$ and $V\to\infty$ can be interchanged only within a single-phase region.

—مسئله‌ی دوم:

10.3 Calculate the second virial coefficients for a spinless hard-sphere Bose gas and a spinless hard-sphere Fermi gas to the *two* lowest nonvanishing orders in a/λ, where a is the hard sphere diameter and λ is the thermal wavelength.

— مسئله‌ی سوم:

Problem 9.1. Compute the second virial coefficient for a gas which interacts via the potential

$$\mathrm{V}(\mathbf{q}) = \begin{cases} \infty & \text{if } q < R, \\ \frac{\varepsilon}{R(\lambda-1)}(q-\lambda R) & \text{if } R \leqslant q \leqslant \lambda R, \\ 0 & \text{if } q > \lambda R. \end{cases}$$

—مسئله‌ی چهارم:

Prove one of the Yang-Lee theorems.

—مسئله‌ی پنجم:

Consider a gas of particles subject to a Hamiltonian

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j), \quad \text{in a volume } \ V.$$

(a) Show that the grand partition function Ξ can be written as

$$\Xi = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(\frac{\mathrm{e}^{\beta\mu}}{\lambda^3}\right)^N \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}^3\vec{r}_i \exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j)\right].$$

(b) The volume V is now subdivided into $\mathcal{N} = V/a^3$ cells of volume a^3, with the spacing a chosen small enough so that each cell α is either empty or occupied by one particle; i.e. the cell occupation number n_α is restricted to 0 or 1 ($\alpha = 1, 2, \cdots, \mathcal{N}$). After approximating the integrals $\int \mathrm{d}^3\vec{r}$ by sums $a^3 \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{N}}$, show that

$$\Xi \approx \sum_{\{n_\alpha = 0,1\}} \left(\frac{\mathrm{e}^{\beta\mu} a^3}{\lambda^3}\right)^{\sum_\alpha n_\alpha} \exp\left[-\frac{\beta}{2}\sum_{\alpha,\beta=1}^{\mathcal{N}} n_\alpha n_\beta \mathcal{V}(\vec{r}_\alpha - \vec{r}_\beta)\right].$$

—مسئله‌ی ششم:

The Vlasov equation is obtained in the limit of high particle density $n = N/V$, or large interparticle interaction range λ, such that $n\lambda^3 \gg 1$. In this limit, the collision terms are dropped from the left-hand side of the equations in the BBGKY hierarchy.

The BBGKY hierarchy

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^{s} \frac{\vec{p}_n}{m} \cdot \frac{\partial U}{\partial q_n} - \sum_{n=1}^{s} \left(\frac{\partial U}{\vec{q}_n} + \sum_{l} \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{q}_n - \vec{q}_l)}{\vec{q}_n} \right) \cdot \frac{\partial}{\vec{p}_n} \right] f_s$$
$$= \sum_{n=1}^{s} \int \mathrm{d}V_{s+1} \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{q}_n - \vec{q}_{s+1})}{\vec{q}_n} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_n}$$

has the characteristic time scales

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau_U} \sim \dfrac{\partial U}{\partial \vec{q}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \vec{p}} \sim \dfrac{v}{L}, \\ \dfrac{1}{\tau_c} \sim \dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vec{q}} \cdot \dfrac{\partial}{\partial \vec{p}} \sim \dfrac{v}{\lambda}, \\ \dfrac{1}{\tau_\times} \sim \displaystyle\int \mathrm{d}x \frac{\partial \mathcal{V}}{\vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\vec{p}} \frac{f_{s+1}}{f_s} \sim \frac{1}{\tau_c} \cdot n\lambda^3, \end{cases}$$

where $n\lambda^3$ is the number of particles within the interaction range λ, and v is a typical velocity. The Boltzmann equation is obtained in the dilute limit, $n\lambda^3 \ll 1$, by disregarding terms of order $1/\tau_\times \ll 1/\tau_c$. The Vlasov equation is obtained in the dense limit of $n\lambda^3 \gg 1$ by ignoring terms of order $1/\tau_c \ll 1/\tau_\times$.

(a) Assume that the N-body density is a product of one-particle densities, that is, $\rho = \prod_{i=1}^{N} \rho_1(\mathbf{x}_i, t)$, where $\mathbf{x}_i \equiv (\vec{p}_i, \vec{q}_i)$. Calculate the densities f_s, and their normalizations.

(b) Show that once the collision terms are eliminated, all the equations in the BBGKY hierarchy are equivalent to the single equation

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial U_{\mathrm{eff}}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}}\right] f_1(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0,$$

where

$$U_{\mathrm{eff}}(\vec{q}, t) = U(\vec{q}\,) + \int \mathrm{d}\mathbf{x}' \mathcal{V}(\vec{q} - \vec{q}\,') f_1(\mathbf{x}', t).$$