آزمون پایان‌ترم مکانیک آماری

دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۸ تیر ۱۴۰۰

نکات مهم

الف: آزمون ساعت ۹ صبح سه‌شنبه شروع می‌شود و تا ۷ عصر چهارشنبه مهلت دارد و جواب‌ها در CW آپلود شود.
ب: پاسخ سوالات را در برگه های جداگانه بنویسید تا از هم تفکیک شوند.
ج: استدلال‌های خود را به صورت کاملا مرتب و منظم، بدون خط خوردگی (و بدون آدرس دادن به صفحات دیگر) و به صورت روشن همراه با جملات رابط فارسی بنویسید. انتظار می رود که نگارنده ی هر مطلب، مفهوم و خط سیر استدلال را روشن سازد.
د: استفاده از درسنامه مجاز است.
در انتخاب سوالات سعی شده است که سوالات اهمیت فیزیکی و بار آموزشی داشته باشند. از این فرصت برای نهایت یادگیری استفاده نمایید و از حل سوالات لذت ببرید. موفق باشید!

۱ مساله بیشینه برش گراف

گراف بزرگی را فرض کنید که شامل مقدار بسیار زیادی رأس $v \in \mathcal{V}$ است و برخی از این رأس‌ها به هم بوسیله یک یال $(v,w) \in \mathcal{E}$ متصل هستند. می‌خواهیم این گراف را به دو زیرگراف کوچکتر مجزا چنان تقسیم کنیم که تعداد یال‌های متصل‌کننده این دو زیرگراف کمینه گردد اما به شرطی که اختلاف تعداد رئوس این دو زیرگراف نیز صفر باشد. به این مساله، بیشینه برش گراف [۱] می‌گوییم.

اکنون فرض کنید که شما بعنوان دانشجوی فیزیک می‌خواهید مساله بالا را حل کنید. برای این کار شاید بهتر باشد که ابتدا یک مساله فیزیکی را جایگزین چنین مساله ریاضی کنیم. یک راه ممکن این است که به هر یک از رأس‌ها و یال‌های موجود وزنی داده شود. بدین جهت می‌توان مفهوم اسپین را وارد کرد. به این صورت که هر رأس گراف را یک اسپین درنظر بگیریم و یال‌های متصل‌کننده را نیز برهم‌کنش‌های فعال بین‌اسپینی فرض می‌کنیم.

در این مساله دو زیرگراف داریم که آن‌ها را با اعداد یک و دو شماره گذاری می‌کنیم. رئوس مربوط به گروه اول را در مجموعه رئوس $\mathcal{V}_1$ و رئوس مربوط به گروه دوم را در مجموعه رئوس $\mathcal{V}_2$ قرار می‌دهیم. اگر یک اسپین متعلق به گروه اول باشد مقدار آن اسپین را $S = 1$ می‌گذاریم و اگر متعلق به گروه دوم بود آن را $S = -1$ قرار می‌دهیم. بدین صورت یک همیلتونی برای این مساله تعریف می‌کنیم.

$$\mathcal{H} = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} S_i S_j \tag{۱}$$

۱. استدلال کنید که چرا مساله بیشینه برش گراف هم‌ارز است با یافتن کمینه انرژی همیلتونی مذکور.

همچنین واضح است که اختلاف رئوس دو زیرگراف را می‌توان با استفاده از تعریف مغناطش برای این مدل آیزینگ، پارامتریزه کرد:

$$m = \frac{1}{N}\sum_i S_i \tag{۲}$$

[۱] Maximum Cut

که N تعداد رئوس گراف است. بنابراین با توجه به شرطی که در ابتدای مساله قرار دادیم، لزوما $m = 0$.

اکنون فرض کنید کمی می‌خواهیم مساله را آسان‌تر کنیم و گیریم که هر راس تنها و تنها به دو راس دیگر متصل است. از طرفی می‌دانیم که می‌توان شرط برقراری مقدار مغناطش را با روشن کردن یک میدان مغناطیسی ثابت B ایجاد کرد. بدین صورت است که همیلتونی این سیستم را بازنویسی می‌کنیم:

$$\mathcal{H} = -\sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} S_i S_j - B\sum_{i\in\mathcal{V}} S_i \tag{۳}$$

جهت یافتن مقدار کمینه انرژی و تمامی دیگر پارامترهای فیزیکی، تنها کافی است که تابع پارش سیستم را حساب کنیم.

۲. با استفاده از روش ماتریس انتقال، تابع پارش سیستم را حساب کنید. جواب شما باید بر حسب دما T، میدان مغناطیسی B و تعداد یال‌های گراف n باشد.

چون در ابتدای مساله ذکر شده که گراف بسیار بزرگ است، می‌توان فرض کرد که n نیز به تبع بسیار بزرگ است. همچنین می‌توان نشان داد (اثبات آن از مبحث ما خارج است) که مساله بیشینه برش گراف دقیقا در دمای $T = 0$ رخ می‌دهد.

۳. با شرایط گفته شده در بالا (دمای صفر و تعداد یال‌های بسیار زیاد)، مغناطش سیستم را حساب کنید و نشان دهید که مقدارش یا همواره یک یا منفی یک است.

ظاهرا به یک مشکل برخوردیم. همانطور که نشان دادید همه رئوس در دمای صفر یا در زیرگراف اول قرار می‌گیرند و یا در زیرگراف دوم و این با فرض اینکه می‌خواهیم اختلاف رئوس دو زیرگراف صفر باشد، در تناقض آشکار است.

ممکن است به ذهنتان برسد که شاید این مشکل به دلیل آن فرضی است که می‌گوید همواره هر رأس تنها با دو رأس همسایه باشد؛ اما اینطور نیست و خودتان می‌توانید نشان دهید که حتی اگر هر اسپین با تعداد زیادی اسپین همسایه باشد، این اتفاق باز هم می‌افتاد.

۴. اولا استدلال کنید که در چه مواردی می‌توان تقریب میدان متوسط را استفاده کرد و چرا در این مساله نیز جایز است. سپس نشان دهید که مغناطش این سیستم با این تقریب در دمای صفر نیز گسسته می‌شود و با دو مقدار بدست آمده در بخش قبلی، یکسان است.

اما جای نگرانی نیست. این مشکل را هم با ثابت نگرفتن میدان مغناطیسی می‌توان حل کرد. در واقع فیزیکدانان با استفاده از یک الگوریتم به نام روش حفره [۲] می‌توانند هم‌زمان هم مغناطش را صفر نگه دارند و هم دما را به صفر ببرند.

۲ لحظات اولیه ی کیهان و مکانیک آماری!

در این پرسش قصد داریم محاسبات نسبتا ساده ولی بسیار تعیین کننده ای را در خصوص مواد داغ کیهان در دوره های اولیه انجام دهیم. ابتدا کار را با تابش پس زمینه ی کیهانی آغاز می کنیم که در درس با آن آشنا شدید.

نیاز داریم که توزیع فوتون های کیهانی را در زمان ها و دوره های گوناگون کیهان داشته باشیم. برای این کار نیاز به تعریف یک مفهوم در کیهان شناسی داریم به نام فاکتور مقیاس. همانگونه که احتمالا شنیدید کیهان در حال انبساط هست. البته در معنای دقیق تر این فضا هست که در حال انبساط است و در نظریه ی نسبیت عام انبساط و انقباض فضا و زمان معنای دقیق خود را دارد. کمیت ریاضی که با آن می توانیم از اندازه ی کلی فضا صحبت کنیم فاکتور مقیاس نام دارد. این ضریب، مقیاس کلی طول های فیزیکی را نسبت به یک دستگاه مشخص شده می سنجد. برای نشان دادن تحول کیهان، فاکتور مقیاس را بر حسب زمان نشان می دهیم. بنابر قرار داد طول را در لحظه ی فعلی جهان به عنوان دستگاه مرجع مشخص می کنیم پس $a(t_0) = 1$.

معادلات فریدمن تحول این ضریب مقیاس را بر حسب زمان کیهانی به ما می دهند، پس تحول هندسه ی عالم، نرخ انبساط و انقباض آن بدست می آید.

۱. در اثر انبساط و انقباض (تغییر فاکتور مقیاس) فرکانس و طول موج فوتون ها تغییر می کند. طول موج متناسب با a تغییر می کند و فرکانس بر حسب عکس آن (می توانید تصور کنید که امواج نوری با تغییر اندازه ی کیهان کشیده یا جمع می شوند). با توجه به این نکته، اگر فرض کنیم که چگالی انرژی فوتون های تابش پس زمینه ای در یک لحظه ی خاص دمای مشخصی دارند، فرم توزیع آن ها را بر حسب فاکتور مقیاس برای دوره ها و لحظات دیگر بدست آورید. توجه کنید که جزء حجمی که در تعریف این توزیع بدست می آید نیز در انبساط یا انقباض فضا تغییر می کند. یعنی

---
[۲] Cavity Method

به عبارتی وضعیت مشابه آن است که توزیع را برای یک جعبه با حجم مشخص بنویسیم ولی جعبه بتواند با مقیاسی مشخص کوچک و بزرگ شود و انرژی فوتون ها نیز مقیاس شوند.

۲. اگر قسمت قبل را درست بدست آورده باشید، می بینید که توزیع چگالی انرژی فوتون ها در هر زمانی از کیهان همچنان به فرم تابع توزیع پلانک برای جسم سیاه هست ولی دمای آن فرق می کند. بدین ترتیب دمای تابش پس زمینه ی کیهانی را به عنوان تابعی از فاکتور مقیاس بدست آورید: $T = T(a)$.

این موضوع نشان می دهد که چرا فرض تعادلی بودن تابش پس زمینه ی کیهانی فرض معقولی است، با این که نقاط دور کیهان فرصت آن را نداشتند که تعادل را حفظ کنند.

۳. در لحظات اولیه کیهان بسیار داغ بوده است و همینطور ذرات آن پراکنده و تک تک بودند و ساختار هایی مانند اتم و مولکول و غیره هنوز تشکیل نشده بود. انرژی فوتون ها آنقدر زیاد بود که هر ساختار به محض تشکیل شدن از هم می پاشید و یونیزه می شد. می خواهیم زمانی را بدست آوریم که کیهان آن قدر سرد شد که اولین اتم های هیدروژن از باریون ها و الکترون های تکی ساخته شد. این زمان، زمان مهمی هست. این همان زمانی هست که فوتون ها نیز از ذرات مادی کمتر پراکنده شدند و اجازه ی انتشار آزاد در فضای کیهان را پیدا کردند و اکنون به چشم ما می رسند.

فرض کنید در لحظات قبل تر کیهان سوپ تعادلی از الکترون، پروتون و اتم های هیدروژن بود. نشان دهید که تعداد بر واجد حجم هر کدام از این ها از رابطه ی زیر بدست می آید:

$$n_i = (2\pi\hbar)^{-3} g_i e^{\frac{\mu_i}{k_B T}} \int d^3p \, \exp \frac{-\left(m_i c^2 + \frac{p^2}{2m_i}\right)}{k_B T}$$

که μ_i پتانسیل شیمیایی مربوط به ذره ی i است و g_i تعداد حالات اسپینی ذره است. اسپین الکترون و پروتون دو حالت دارد و اسپین اتم هیدروژن نیز ۴ حالت در کل دارد (به دلیل جمع شدن اسپین پروتونِ هسته و الکترون و اثر ساختار فوق ریز). از اثرات کوانتومی هم برای آمار به کلی چشم پوشی کردیم. همچنین انرژی را به صورت نسبیتی ولی برای حد سرعت های کم در نظر گرفتیم و یک سهم برای انرژی سکون وجود دارد.

۴. دو قید می توانیم روی این سه جز ماده ای که داریم اعمال کنیم. نخست این که خنثی بودن کیهان ایجاب می کند که

$$n_e = n_p$$

همچنین از جای دیگر می دانیم که در لحظات اولیه کیهان که مربوط به مسئله ی ما هست، تعداد پروتون ها و اتم های هیدروژن ۷۶ درصدِ تعداد کل باریون ها هست:

$$n_p + n_H = 0.76 n_B$$

از طرفی تعداد کل باریون های عالم ثابت است. پس تعداد بر واحد حجم آن ها طبق این رابطه بدست می آید (چرا؟)

$$n_B(a(t)) = \frac{n_B(t_0)}{a^3}$$

تعداد باریون های بر واحد حجم در لحظه ی کنونی را هم از طریق مشاهده (داده های پلانک ۲۰۱۵) می دانیم:

$$n_B(t_0) = 2.5 \times 10^{-7} cm^{-3}$$

حال کمیتی را تعریف می کنیم که مقدار تشکیل اتم ها را برای ما کمّی کند:

$$X \equiv \frac{n_p}{n_p + n_H}$$

از نتایج قبل استفاده کنید و X را بر حسب فقط دما بدست آورید (تمامی مقادیر عددی را جایگزین کنید).

(راهنمایی: می توانید نسبت بین جرم هیدروژن و جرم پروتون را یک در نظر بگیرید. ولی این تقریب را روی نمای تابع نمایی اعمال نکنید چرا که اختلاف های اندک نیز نتیجه ی نمایی بزرگ می آورند. همچنین اختلاف جرم سکون اتم هیدروژن و پروتون و الکترون را به انرژی بستگی اتم هیدروژن ربط دهید.)

۵. X را بر حسب دما رسم کنید. در نقطه ی خاصی باید تغییر شدیدی در آن مشاهده کنید. دمای مربوطه ی آن نقطه به دمای بازترکیب مشهور است. آن دما، دمای عالم در لحظه ای بوده است که اغلب ماده ی باریونی به شکل اتم های هیدروژن تشکیل شده بود و دیگر سوپ غلیظی از ذرات منفرد نبود.

دمای تعادلی کنونی تابش پس زمینه ی کیهان را از تمرین ها می دانید. حال طبق رابطه ی بین دمای تعادلی عالم و فاکتور مقیاس که بدست آوردید، اندازه ی جهان (مقدار عددی فاکتور مقیاس) را در زمان بازترکیب نسبت به اندازه ی کنونی بدست آورید.

۳ Tonks Gas

در یک بعد گازی را در نظربگیرید که طول ذرات آن a است و طول کل سیستم l است. فرض کنید پتانسیل برهم‌کنش ذرات آن به شکل زیر باشد.

$$U(x_i - x_j) = \begin{cases} \infty, & |x_i - x_j| < a. \\ 0, & |x_i - x_j| > a. \end{cases}$$

۱. تابع پارش سیستم را به دست آورید. برای اینکار رشته‌ای به طول l در نظربگیرید و فرض کنید که تک‌تک ذرات را روی آن گذاشته‌اید. با توجه به پتانسیلی که برهمکنش ذرات دارند یعنی موقع قرار دادن ذرات روی رشته، آن‌ها را مرتب کنار هم می‌گذاریم تا کل رشته را پرکنند. پس برای انرژی ذرات کافی است انرژی پتانسیل را درنظر بگیرید. راهنمایی: در هنگام محاسبه انتگرال برای به دست آوردن تابع پارش از تغییر متغییر زیر برای ساده‌تر شدن بازه‌های انتگرال استفاده کنید.

$$y_i = x_i - (i + \frac{1}{2})a$$

که در رابطه بالا x_i یعنی مکان مرکز ذره i ام.

۲. حالا با داشتن تابع پارش می‌توانید معادله حالت سیستم یعنی رابطه فشار با حجم و دما را به‌دست آورید. برای این کار اول می‌توانید از روی تابع پارش انرژی آزاد را حساب کرده و از روی آن فشار را محاسبه کنید. در محاسباتتان به جای حجم در یک بعد l قرار دهید.

۳. همانطور که می‌دانیم بسط ویریال به شکل زیر است.

$$\frac{PV}{NKT} = 1 + B_2(T)(\frac{N}{V}) + B_3(T)(\frac{N}{V})^2 + \dots$$

اگر ضرایب بسط ویریال را برای این مسئله به دست آوریم مطابق زیر می‌شوند. (شما هم می‌توانید محاسبات را انجام دهید و جواب زیر را به دست آورید.)

$$\frac{Pl}{NKT} = 1 + a(\frac{N}{l}) + a^2(\frac{N}{l})^2 + \dots$$

حالا جوابی که در بخش قبل به‌دست آوردید را برای مقادیر کوچک $\frac{Na}{l}$ بسط دهید و آن را با بسط ویریال مقایسه کنید و ببینید که مشابه هم هستند.

۴ آمار کوانتومی نوسانگر هماهنگ

دو ذره یکسان و بدون برهم کنش به جرم M که تحت پتانسیل نوسانگر هماهنگ یک بعدی هستند در نظر بگیرید. واضح است همیلتونی برای یک ذره عبارت است از:

$$\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2} + \frac{m\omega^2}{2}q^2$$

که ویژه مقادیر و ویژه توابع آن عبارتند از از:

$$\epsilon_n = \hbar\omega(n+1/2), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

$$\psi_n(q) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}(m\omega/\pi\hbar)^{1/4} \exp\left[-m\omega q^2/2\hbar\right] H_n(\sqrt{m\omega/\hbar}q), \text{ with } H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, \text{ etc.}$$ ،

۱ــ تابع موج دستگاه دو ذره ای در حالت پایه ($\psi_{gs}(q_1, q_2)$) را در صورتی که ذرات ۱ــ بوزون ۲ــ فرمیون باشند بیابید. (پاسختان را برحسب $\psi_n(q)$ بیان کنید.)
۲ــتابع موج دستگاه دوذره ای در اولین حالت برانگیخته($\psi_{exc}(q_1, q_2)$) را در صورتی که ذرات ۱ــ بوزون ۲ــ فرمیون باشند.(باید پاسختان را برحسب $\psi_n(q)$ بیان کنید.)
۳ــ تابع پارش دستگاه $Z_2(T)$را در هنگرد قانونی به طور صریح برای فرمیونها و بوزون ها محاسبه کنید. آنرا بر حسب تابع پارش یک ذره ای $Z_1(T)$ برای هر کدام به دست آورید.

۵ تپ اختر

یک ستاره نوترونی با چرخش سریع خود حول محورش که یک نیروی گریز از مرکز ایجاد می کند می تواند با نیروی گرانشی مقابله کند. چنین ستاره‌ای یک تپ اختر نامیده می شود. نخست شعاع یک ستاره نوترونی با جرم ۲ برابر جرم خورشید را محاسبه کنید. سپس مقدار مینیمم سرعت زاویه ای این ستاره را پیدا کنید به نحوی که مانع رمبش گرانشی شود.