

# پراش الکترون

## پارسا رنگریز

آزمایشگاه فیزیک ۴، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

### ۱ مقدمه

در اوایل قرن ۲۰م بود که دوبروی با فرض اینکه هر ذره می‌تواند از خود خواص موجی داشته باشد و به این دلیل طول موجی دارد، مسیر کوانتوم قدیم را تغییر داد. فرضیه او پیش‌بینی می‌کرد که هر ذره با استفاده از داشتن تکانه‌اش می‌توان طول موج آن را از رابطه زیر متوجه شد

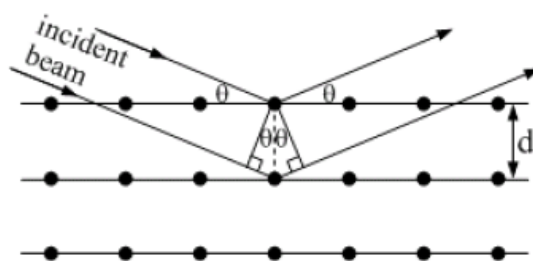
$$p = \frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

چند سال بعد سه تن از دانشمندان به نام‌های دیویسون، گرمر و تامسون آزمایشی را تهیه کردند که رابطه دوبروی را تایید می‌کرد. آنها باریکه‌ای از الکترون‌ها را با انرژی مناسب بر روی نمونه‌های کریستال تاباندند و در نتیجه آن پرتوهای عبوری طرح‌های دایروی بر روی صفحه آشکارساز فلورسنت برجای گذاشتند. این نتیجه با فرض رفتار موج گونه الکترون‌ها و پراکندگی این امواج از شبکه تناوبی اتم‌ها در صفحات بلور و تداخل سازنده آنها قابل توجیه است.

شکل ۱ امواج بازتابیده از صفحات بلور را نشان می‌دهد. پرتوی ورودی با زاویه  $\theta$  به سطح نمونه تابیده می‌شود. شرط تداخل سازنده دو پرتوی تابیده از صفحات متوالی این است که اختلاف راه دو پرتو، مضرب صحیحی از طول موج باشد که از رابطه زیر که به رابطه براگ معروف است، بدست می‌آید.

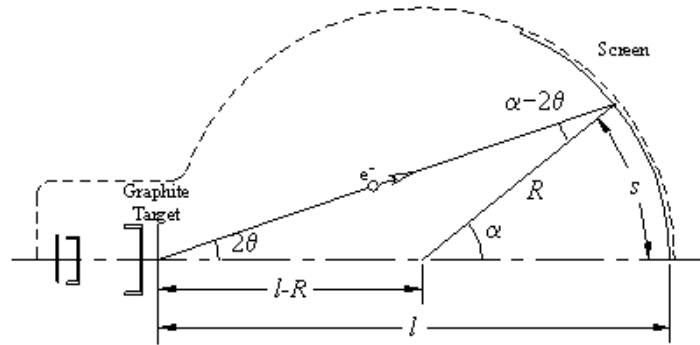
$$2d \sin \theta = n\lambda \quad (2)$$

که  $d$  ثابت شبکه کریستال و  $n$  مرتبه پراش است. از طرح پراش می‌توان تقارن‌های شبکه کریستالی و ثابت‌های شبکه را بدست



شکل ۱: امواج بازتابیده از صفحات اتمی

آورد. با توجه به شکل ۲، از طریق دانستن فاصله نمونه از صفحه آشکارساز  $l$  و پتانسیل  $V$  و اندازه‌گیری  $R$  و همچنین شعاع دواير روشن مربوط به بازتاب از نمونه پلی کریستال  $r$  می‌توان زاویه  $\theta$  و ثابت شبکه  $d$  را بدست آورد.



شکل ۲: طرح شماتیک برای تعیین زاویه پراش

اگر یک اختلاف پتانسیل  $V$  برای الکترون‌ها بوجود آید، طول را داریم

$$\lambda(V) = \frac{h}{\sqrt{2meV}} \quad (۳)$$

چنانچه از رابطه براگ نیز استفاده کنیم و مرتبه پراش  $n = 1$  را در نظر بگیریم، آنگاه

$$\sin \theta = \frac{h}{d\sqrt{8meV}} = \frac{\lambda(V)}{2d} \quad (۴)$$

با توجه به شکل (۲) داریم

$$\tan 2\theta = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha + l - R} = \frac{\sin \alpha}{\frac{l}{R} + \cos \alpha - 1} \quad (۵)$$

با توجه به شکل و نیز محاسبات اولیه از روی اعداد آزمایشی، می‌توان متوجه شد که زاویه  $\theta$  کوچک است؛ پس از تقریب  $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$  بنابراین

$$\theta \approx \frac{h}{d\sqrt{8meV}} = \frac{\lambda(V)}{2d} \quad (۶)$$

از طرفی می‌توان تقریباً نوشت  $R \sin \alpha \approx r$  که شعاع دایره روشن است. در نتیجه

$$\theta \approx \frac{r/2}{l - R + \sqrt{R^2 - r^2}} \quad (۷)$$

با توجه به معادلات (۶) و (۷) رابطه‌ای برای  $d$  بدست آورد.

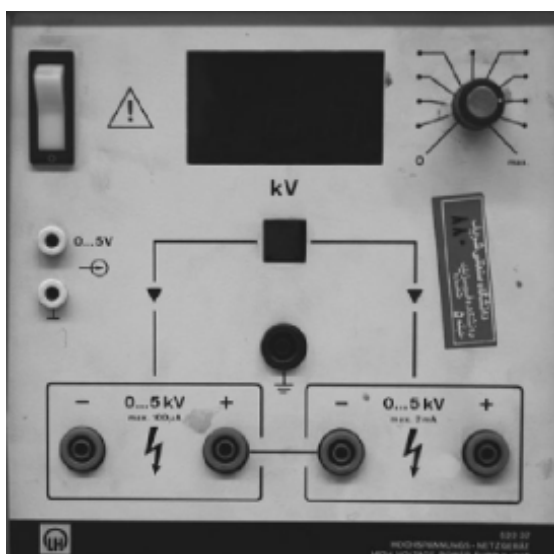
$$d(V) \approx \frac{h}{r(V)\sqrt{2meV}} \left( l - R + \sqrt{R^2 - r(V)^2} \right) \quad (۸)$$

می‌توان رابطه بالا را بر حسب طول موج نیز نوشت

$$d(V) = \frac{\lambda(V)}{r(V)} \left( l - R + \sqrt{R^2 - r(V)^2} \right) \quad (۹)$$



شکل ۳: لامپ اشعه الکترونی



شکل ۴: منبع ولتاژ لامپ

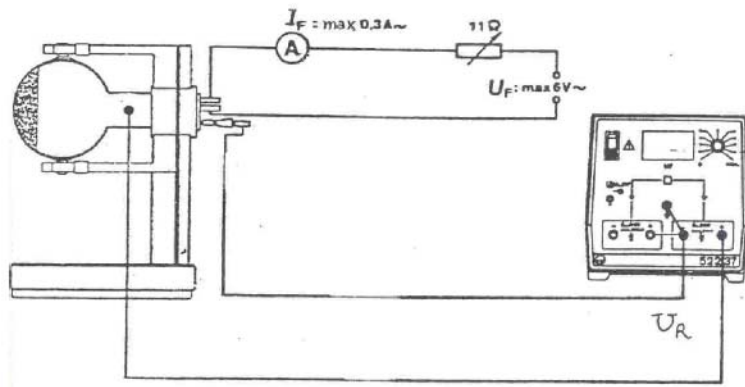
## ۲ وسایل آزمایش

- (۱) لامپ الکترونی (مطابق شکل ۳)
- (۲) منبع ولتاژ - (مطابق شکل ۴)
- (۳) منبع جریان فیلامان (منبع AC ۶ ولت)
- (۴) رئوستا
- (۵) پتانسیومتر
- (۶) آمپر متر

## ۳ شرح آزمایش

مدار را مطابق شکل ۵ می‌بندیم. فیلامان را به منبع متناوب ۶ ولت و آمپر متر و رئوستا وصل می‌کنیم. قبل از روشن کردن منبع، رئوستا را در بشینه مقاومت قرار می‌دهیم و منبع را روشن نموده و با استفاده از رئوستا جریان  $I_f$  را ۲۰۰ میلی آمپر تنظیم می‌کنیم.

پتانسیومتر ولتاژ زیاد  $V$  را بر روی صفر قرار داده و سپس آن را روشن می‌کنیم. با اعمال ولتاژ مناسب، طرح پراش قابل مشاهده است. با اعمال چندین ولتاژ  $V$  و اندازه‌گیری شعاع دوایر، داده‌گیری می‌کنیم.



شکل ۵: طرز اتصال دستگاه‌ها

#### ۴ هدف آزمایش

در این آزمایش سعی داریم طرح پراش از نمونه گرافیت پلی کریستالی را مشاهده کنیم و طول موج وابسته به الکترون‌ها و ثابت شبکه گرافیت را اندازه‌گیری کنیم.

## ۵ جدول داده‌ها

با اندازه‌گیری مستقیم خواهیم داشت:

$$l = 13.5\text{cm}, R = 6.3\text{cm} \quad (10)$$

در جدول بالا باید توجه داشت  $\Delta V = \pm 0.01\text{kV}$  و  $\Delta r_1 = \Delta r_2 = \pm 0.1\text{cm}$ .

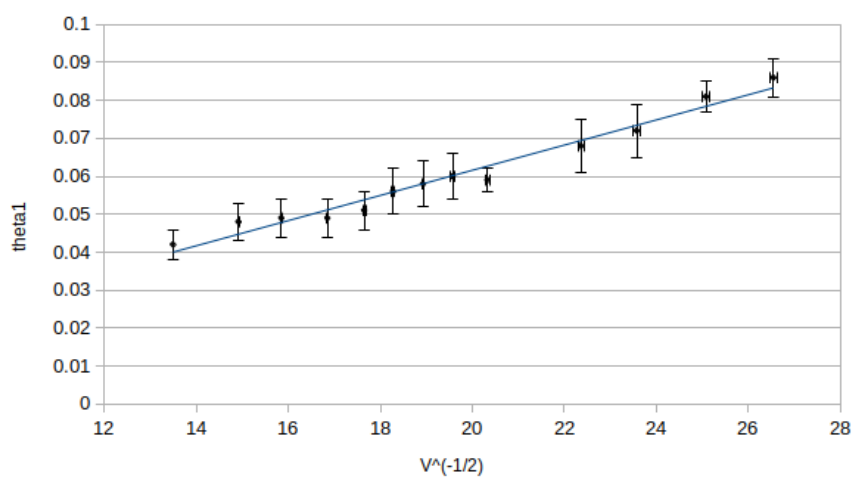
جدول ۱: ثوابت شبکه بر حسب ولتاژ

$V(\text{kV})$	$r_1(\text{cm})$	$r_2(\text{cm})$	$\lambda(A^\circ)$	$\Delta\lambda(A^\circ)$	$d_1(A^\circ)$	$d_2(A^\circ)$	$\Delta d_1(A^\circ)$	$\Delta d_2(A^\circ)$
1.42	2.2	3.6	0.325	0.005	1.9	1.12	0.1	0.09
1.59	2.1	3.5	0.308	0.004	1.9	1.09	0.1	0.09
1.80	1.9	3.2	0.289	0.003	2.0	1.14	0.2	0.09
2.00	1.8	3.1	0.274	0.003	2.0	1.12	0.2	0.09
2.20	1.9	3.0	0.261	0.002	1.8	1.11	0.1	0.09
2.42	1.6	2.8	0.249	0.002	2.1	1.1	0.2	0.1
2.61	1.6	2.7	0.240	0.002	2.0	1.1	0.2	0.1
2.79	1.5	2.6	0.232	0.002	2.1	1.5	0.2	0.1
2.99	1.5	2.5	0.224	0.002	2.0	1.2	0.2	0.1
3.21	1.4	2.4	0.216	0.001	2.0	1.2	0.2	0.1
3.52	1.3	2.3	0.207	0.001	2.1	1.2	0.2	0.1
3.98	1.3	2.1	0.194	0.001	2.0	1.2	0.2	0.1
4.49	1.3	2.1	0.1830	0.0008	1.9	1.2	0.2	0.1
5.49	1.1	1.9	0.1655	0.0006	2.0	1.2	0.2	0.1

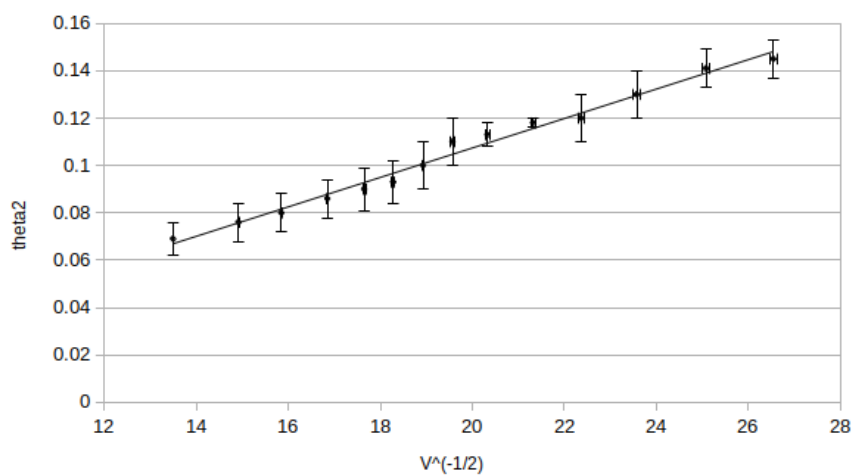
جدول ۲:  $\theta$  بر حسب تغییرات  $\frac{1}{\sqrt{V}}$

$\frac{1}{\sqrt{V}} \left( m \frac{1}{\sqrt{V}} \right)$	$\Delta \frac{1}{\sqrt{V}} \left( m \frac{1}{\sqrt{V}} \right)$	$\theta_1$	$\Delta\theta_1$	$\theta_2$	$\Delta\theta_2$
26.54	0.09	0.086	0.005	0.145	0.008
25.08	0.08	0.081	0.004	0.141	0.008
23.75	0.07	0.072	0.007	0.13	0.01
22.36	0.06	0.068	0.001	0.12	0.01
21.32	0.05	0.073	0.003	0.118	0.002
20.33	0.04	0.059	0.006	0.113	0.005
19.57	0.04	0.060	0.006	0.110	0.01
18.93	0.03	0.058	0.006	0.100	0.01
18.28	0.03	0.056	0.006	0.093	0.009
17.65	0.03	0.051	0.005	0.090	0.009
16.85	0.03	0.049	0.005	0.086	0.008
15.85	0.02	0.049	0.005	0.080	0.008
14.92	0.02	0.048	0.005	0.076	0.008
13.50	0.01	0.042	0.004	0.069	0.007

## ۶ نمودار داده‌ها



شکل ۶: نمودار زاویه  $\theta_1$  بر حسب  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  برای حلقه اول



شکل ۷: نمودار زاویه  $\theta_2$  بر حسب  $\frac{1}{\sqrt{V}}$  برای حلقه دوم

## ۷ خطا

برای بخش جداول و نمودار از روابط خطای زیر استفاده شده است:

$$\Delta V = 0.01V, \Delta R = \Delta l = \Delta r_{1,2} = 0.1cm \quad (11)$$

$$\Delta \lambda = \frac{\Delta V}{2V} \lambda \quad (12)$$

$$(13)$$

$$\Delta d_{1,2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \lambda}{\lambda} d_{1,2}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r} d_{1,2} + \frac{\lambda \Delta r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{r} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{r} \left(-1 + \frac{R}{\sqrt{R^2 - r^2}}\right) \Delta R\right)^2}$$

در این آزمایش خطاهای زیر وجود داشت:

(۱) خطای خوانش قطر دواپر روشن. چرا که خود دواپر ضخامت داشتند و این باعث ایجاد خطا می‌شد.

(۲) خطای سیستماتیک منبع ولتاژ لامپ، رئوستا و دیگر دستگاه‌ها

(۳) چشم‌پوشی از نایکسان بودن فاصله پرده آشکارساز با نمونه که تابعی از شعاع حلقه روشن بود.

خطای شیب نمودار خطی فیت شده نیز این‌گونه بدست می‌آید:

$$\Delta b = b \sqrt{\frac{1}{N-2} \left(\frac{1}{r^2} - 1\right)} \quad (14)$$

که  $N$  تعداد داده‌ها و  $r$  رگرسیون است.

## ۸ نتیجه‌گیری

(۱) در بدست آوردن تکانه الکترون از روابط کلاسیک استفاده شده است چرا که سرعت آن به وضوح از سرعت نور کم بود:

$$\frac{v}{c} = \sqrt{\frac{2eV}{mc^2}} \approx 0.01 \quad (15)$$

(۲) نقطه نورانی مرکز لامپ مربوط به پرتوهای پراش نشده است.

(۳) با توجه به نمودارهای ۱ و ۲ برای ثوابت شبکه داریم:

$$\frac{h}{\sqrt{8med_1}} = b_1 = 0.0034 \pm 0.0002 \left(k \frac{1}{\sqrt{V}}\right) \rightarrow d_1 = 1.8 \pm 0.1A^\circ \quad (16)$$

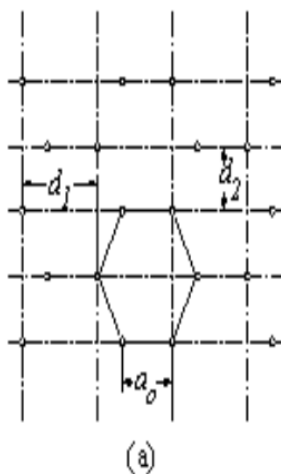
$$\frac{h}{\sqrt{8med_2}} = b_1 = 0.0062 \pm 0.0003 \left(k \frac{1}{\sqrt{V}}\right) \rightarrow d_2 = 0.99 \pm 0.05A^\circ \quad (17)$$

$$\frac{d_1}{d_2} = 1.8 \pm 0.1 \quad (18)$$

(۴) با توجه به اینکه نسبت ثوابت شبکه نزدیک به ۲ است، بنابراین شبکه گرافیتی یک شبکه شش ضلعی است. اکنون می‌توان با استفاده از این حقیقت فاصله دو اتم کرین  $a$  را بدست آورد (شکل ۸)

$$a = \frac{d_1^2 + d_2^2}{2d_1} = 1.17 \pm 0.07A^\circ \quad (19)$$

### Hexagonal Lattice



شکل ۸: شبکه گرافیت

۵) با توجه به اینکه پراش‌های مرتبه بالاتر در زوایای بزرگتری رخ می‌گیرد و چون شدت نور کمتری خواهد داشت و ما آنها را آشکار نتوانسته‌ایم بکنیم، بنابراین این‌ها پراش مرتبه اول است.  
 ۶) اگر جای پرتوهای الکترونی از پرتوی پروتونی بهره می‌بریم و به شعاع‌های یکسانی می‌رسیدیم، آنگاه

$$\frac{V_p}{V_e} = \frac{m_e}{m_p} = 5.45 \times 10^4 \quad (20)$$

۷) طبیعت موجی ماده در مشاهدات روزمره مشهود نیست چرا که اکثر اشیای قابل مشاهده جرم قابل توجه بالایی دارند و به این سبب طول موج دوبروی آنها بسیار کوچک خواهد شد.

۸) توری پراش آزمایش ریدبرگ برای این آزمایش قابل استفاده نیست چرا که طول موج الکترون از مرتبه آنگستروم است و ثابت توری پراش از مرتبه میکرومتر است و در این صورت زاویه انحرافی  $\theta$  بسیار کوچک و عملاً صفر خواهد بود. (رابطه ۲)

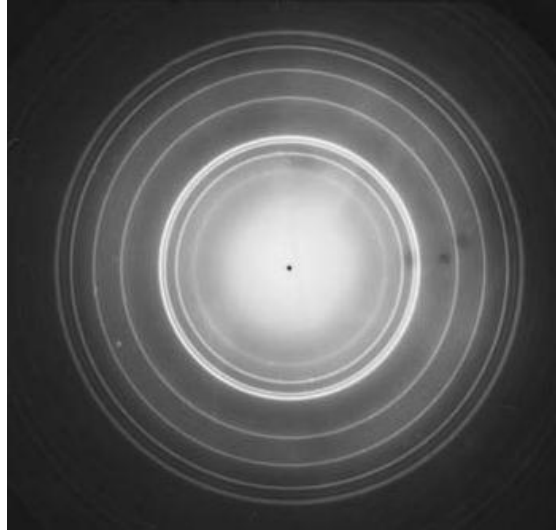
۹) در میکروسکوپ‌های الکترونی یک شماره‌ای از الکترون‌ها را به سمت نمونه مورد نظر گسیل می‌کنند و الکترون‌ها پراشیده می‌شوند. سپس این الکترون‌ها آشکار سازی شده و از روی آنهايي که پراش رخ گرفته است شکل نمونه اصلی قابل حدس خواهد بود.

۱۰) می‌توان آنها را قبل گسیل از یک میدان قوی مغناطیسی عبور داد که آنها را همسو کند و سپس آنها را از یک دریچه ریز عبور داد در این صورت پرتوها به صورت متمرکز به نمونه برخورد خواهند داشت.

۱۱) نمونه گرافیت می‌بایست نازک باشد تا پرتوها پس از پراش مرتبه اول توانایی گذر از لایه گرافیت را داشته باشند و به دیگر اتم‌ها برخورد نکنند.

۱۲) اگر گرافیت به فرم بلوری بود، آنگاه طرح پراش به مانند شکل ۹ و ۱۰ می‌بود.





شکل ۹: طرح پراش پلی کریستال



شکل ۱۰: طرح پراش تک کریستال