آونگ‌های جفت شده

پارسا رنگریز

آزمایشگاه فیزیک ۳، دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شریف

۱ مقدمه

مطالعه پدیده جفت‌شدگی در نوسان، اولین بار با کنجکاوی دانشمند آلمانی کریستیان هویگنس، مخترع سایت پاندولی (شکل ۱) شروع شد که منجر به شناخت جدیدی در نوسان و حرکت نوسانی گردید. او در سال ۱۶۶۵ میلادی مشاهده کرد که دو ساعت آونگی که از یک میله مشترک آویزان شده بودند، همیشه با یکدیگر حرکت می‌کنند (هم‌فاز هستند). وی فهمید که این به دلیل میله مشترک دو آونگ است که آن دو را با یکدیگر جفت می‌کند. بعدها جفت‌شدگی به صورت کلی‌تر مورد مطالعه قرار گرفت.

۲ مدل و نظریه

۱.۲ معادله حرکت

فرض کنیم دو آونگ یکسان را با یک فنر به یکدیگر جفت کرده‌ایم (شکل ۲). برای توصیف حرکت این سیستم نیاز داریم تا معادله حرکت را بنویسیم. برای این کار گشتاور وارد به هر آونگ حول تکیه‌گاز را بدست می‌آوریم. نیروهای وارد به هر آونگ شامل نیروی جاذبه، نیروی نقطه تکیه‌گاه و نیروی فنر است. از آن‌جایی که گشتاور حول نقطه تکیه‌گاه محاسبه می‌شود، نیازی به دانستن نیروی تکیه‌گاه نداریم.

اگر فرض کنیم وزنه پایین آونگ عمده جرم آونگ را تشکیل می‌دهد، می‌توان گفت نیروی وزن در همان نقطه (گرانیگاه) وارد می‌شود. بنابراین طول بازوی نیروی جاذبه بر اساس پارامترهای شکل ۲ برابر با L است. زاویه بین بازوی نیرو و نیرو برای آونگ اول برابر ϕ_1 (در شکل ۲، $\phi_1 < 0$) است، در نتیجه گشتاور جاذبه حول تکیه‌گاه برابر با $\tau_g = -mgL\sin(\phi)$ است. فرض کنیم دامنه‌های نوسان کوچک بوده یعنی زاویه انحراف آونگ $\phi \ll 1$ است، با این تقریب می‌توان گفت به جای $\sin(\phi_1)$ خود ϕ_1 را قرار دارد. در نتیجه داریم $\tau_g = -mgL\phi_1$. برای آونگ ۲ هم همین رابطه را خواهیم داشت.

برای تعیین گشتاور نیروی حاصل از فنر، باید ابتدا نیروی فنر را محاسبه کرد. فرض می‌کنیم وقتی آونگ‌ها عمود هستند فنر در طول طبیعی خودش قرار دارد، بنابراین تغییر طول فنر به اندازه $\Delta x = l\sin(\phi_2) - l\sin(\phi_1)$ است (شکل ۲). با فرض کوچک بودن زاویه‌ها و بسط تیلور، جابجایی به شکل $\Delta x = l(\phi_2 - \phi_1)$ است، پس اندازه نیرو از قانون هوک با استفاده از رابطه $F = D_F l(\phi_2 - \phi_1)$ (D_F ثابت نیروی فنر) بدست می‌آید. با توجه به اینکه فنر یا فشرده می‌شود و یا باز می‌شود، نیرویی که به آونگ‌ها وارد می‌شود در خلاف جهت هم خواهد بود. زاویه بین بازوی نیرو و نیرو $\frac{\pi}{2} \pm \phi_1$ است و چون بسط تیلور $\sin(frac\pi 2 \pm \phi_1)$ تا مرتبه اول، یک می‌شود، بنابراین گشتاور وارد بر آونگ اول برابر با $\tau_1 = D_F l^2(\phi_2 - \phi_1)$ و گشتاور وارد بر آونگ دوم عکس این مقدار یعنی برابر با $\tau_2 = -D_F l^2(\phi_2 - \phi_1)$

خواهد بود. اکنون معادله‌های حرکت را برای این دو آونگ می‌نویسیم. اگر فرض کنیم لختی دورانی هر آونگ برابر با I است، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I\ddot{\phi_1} &= -mgL\phi_1 + D_F l^2(\phi_2 - \phi_1) \\ I\ddot{\phi_2} &= -mgL\phi_2 - D_F l^2(\phi_2 - \phi_1) \end{aligned} \tag{۱}$$

بر اساس انتظارمان به دو معادله دیفرانسیل جفت‌شده می‌رسیم. اگر این گونه نبود باید در راه حل خود شک می‌کردیم، چون فیزیک مساله جفت‌شده است. معادله‌های حرکت به صورت ساده شده به شکل زیر است:

$$\begin{aligned} I\ddot{\phi_1} &= -(mgL + D_F l^2)\phi_1 + D_F l^2\phi_2 \\ I\ddot{\phi_2} &= -(mgL + D_F l^2)\phi_2 + D_F l^2\phi_1 \end{aligned} \tag{۲}$$

ثابت جفت‌شدگی را با رابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$K = \frac{D_F l^2}{mgL + D_F l^2} \tag{۳}$$

با توجه به اینکه ما جرم وزنه آونگ‌ها را نسبت به بقیه اجزای آن خیلی بزرگ گرفتیم، می‌توانیم لختی دورانی را به صورت $I = mL^2$ تقریب بزنیم. برای ساده‌سازی معادله‌های بالا کمیت‌های جدیدی معرفی می‌کنیم:

$$\omega_0^2 = \frac{mgL}{I} = \frac{g}{L} \tag{۴}$$

و

$$\Omega^2 = \frac{D_F l^2}{I} = \frac{D_f l^2}{mL^2} \tag{۵}$$

معادله‌های بالا را به شکل زیر می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \ddot{\phi_1} &= -(\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_1 + \Omega^2\phi_2 \\ \ddot{\phi_2} &= -(\omega_0^2 + \Omega^2)\phi_2 + \Omega^2\phi_1 \end{aligned} \tag{۶}$$

۲.۲ حل معادله حرکت

معادله‌های بالا را به شکل ماتریسی می‌نویسیم، یعنی:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\omega_0^2 - \Omega^2 & \Omega^2\\ \Omega^2 & -\omega_0^2 - \Omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{۷}$$

با تعیین مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس، رابطه‌های زیر را می‌توان نوشت:

$$\begin{pmatrix}-\omega_0^2 - \Omega^2 & \Omega^2\\ \Omega^2 & -\omega_0^2 - \Omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} = -\omega_0^2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \tag{۸}$$

$$\begin{pmatrix}-\omega_0^2 - \Omega^2 & \Omega^2\\ \Omega^2 & -\omega_0^2 - \Omega^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = -(\omega_0^2 + 2\Omega^2)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \tag{۹}$$

همیشه می‌توان هر بردار را بر حسب این دو بردار ویژه بسط داد، یعنی:

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} = a(t)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + b(t)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \tag{۱۰}$$

با استفاده از معادله‌های ۱۰ تا ۱۳ معادله ۱۰ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\ddot{a}(t)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \ddot{b}(t)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} = -\omega_0^2 a(t)\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} - (\omega_0^2 + 2\Omega^2)b(t)\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \tag{۱۱}$$

چون هر بردار ویژه مستقل است، می‌توان ضریب هر بردار در دو طرف معادله بالا را به صورت جداگانه برابر گذاشت.

$$\ddot{a}(t) = -\omega_0^2 a(t) \tag{۱۲}$$

$$\ddot{b}(t) = -(\omega_0^2 + 2\Omega^2)b(t) \tag{۱۳}$$

حالا باید دید که معنای این معادلات چیست؟ اگر در لحظه $t = 0$، $\phi_1 = \phi_2$ باشد، ضریب بردار ویژه دوم، یعنی $b(t)$ صفر خواهد بود و جابجایی آونگ‌ها دقیقا مثل یکدیگر است. بر اساس معادلات می‌توان گفت این تساوی همیشه باقی مانده و هر کدام از آونگ‌ها با بسامد ω_0 به نوسان خود ادامه می‌دهند. انگار فنر بی فنر! واضح است وقتی که جابحایی آونگ‌ها یکسان باشد، فنر تغییر شکل نداده و نیروی به آونگ‌ها وارد نمی‌کند.

اگر در لحظع $t = 0$، $\phi_1 = -\phi_2$ یعنی جابجایی آونگ‌ها مخالف باشد، ضریب بردار ویژه اول، یعنی $a(t)$ صفر است. بر اساس معادلات مجموعه با بسامد $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + 2\Omega^2}$ نوسان می‌کند. در این جا فنر نقش خود را ایفا می‌کند و بسامد بیش‌تر می‌شود.

حالا اگر آونگ‌ها طوری نوسان کنند که حالت آن‌ها به صورت ترکیب این دو بردار ویژه باشد، چه می‌شود؟ بر اساس معادله ۱۳ می‌دانیم که $\phi_1 = a(t)+b(t)$ و $\phi_2 = a(t)-b(t)$ است. $a(t)$ و $b(t)$ هم دو عدد نوسانی با بسامدهای متفاوت هستند. در فیزیک وقتی وضعیت دو نوسانگر با بسامدهای متفاوت جمع می‌شود پدیده‌ای به نام زنش (تپش) رخ می‌دهد. اگر دو منبع صوتی با بسامدهای نزدیک داشته باشیم، صدا با میانگین بسامدها شنیده می‌شود اما دامنه صدا با بسامد مشخصی ضعیف و قوی می‌شود، به دلیل این ضعیف و قوی شدن به این پدیده تپش می‌گویند. اگر معادله حرکت $a(t) = u\sin(\omega_0 t)$ و $b(t) = u\sin(\omega_c t)$ را با یکدیگر جمع کنیم (یا تفریق). داریم:

$$\phi_1 = 2u\sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_c}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_c}{2}t\right) \tag{۱۴}$$

بنابراین مجموع این دو عدد نوسان‌کننده با میانگین بسامدهای ω_0 و ω_c نوسان می‌کند و دامنه آن در طول زمان با بسامد $\frac{\omega_0-\omega_c}{2}$ زیاد و کم می‌شود. در این جا دو کمیت جدید معرفی می‌کنیم

$$\omega_1 = \frac{\omega_c - \omega_0}{2}, \quad \omega_2 = \frac{\omega_c + \omega_0}{2} \tag{۱۵}$$

اگر جفت‌شدگی خیلی ضعیف باشد، می‌توان گفت $\Omega \ll \omega_0$ است. برای بهتر فهمیدن آن، فرض کنید هیچ فنری دو آونگ را به هم جفت نمی‌کند، بر این اساس انتظار داریم $\Omega = 0$ باشد. حالا اگر فنر بسیار شل باشد، جفت‌شدگی نزدیک صفر بوده و این عدد از بسامد زاویه‌ای آونگ‌ها کوچکتر خواهد بود. با فرض $\Omega \ll \omega_0$ می‌توان بسامد ω_c را ساده‌تر نوشت، یعنی:

$$\omega_c \approx \omega_0 + \frac{\Omega^2}{\omega_0} \tag{۱۶}$$

در نتیجه برای ω_1 و ω_2 خواهیم داشت:

$$\omega_1 \approx \frac{\Omega_2}{2\omega_0}, \quad \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\Omega^2}{2\omega_0} \tag{۱۷}$$

با جایگذاری Ω بر حسب طول و جرم آونگ و ثابت فنر رابطه‌های زیر برای ω_c، ω_1 وω_2 بدست می‌آید.

$$\omega_c = \omega_0 \frac{D_F}{mgL} l^2 + \omega_0, \quad \omega_c = \omega_1 \frac{D_F}{2mgL} l^2, \quad \omega_2 = \omega_0 \frac{D_F}{2mgL} l^2 + \omega_0, \tag{۱۸}$$

بنابراین ω_c، ω_1، ω_2 بر حسب l^2 به شکل خط می‌شود از طرفی عرض از مبدا نمودار ω_c و ω_2 بر حسب l^2 مقدار بسامد آونگ منزوی ω_0 یا بسامد نوسان هم‌فاز را می‌دهد.

۳ وسایل آزمایش

دستگاه کبرا۳، منبع تغذیه، آونگ همراه با قسمت اتصال به دستگاه کبرا۳ (۲ عدد)، فنر، میله قلاب‌دار، وزنه‌های شیاردار همراه با نگهدارنده، گیره میز (۲ عدد)، میله بطول ۶۳ سانتی‌متر (۲ عدد)، گیره نود درجه (۲ عدد)، خازن (۲ عدد) و سیم رابط (۸ عدد)

۴ روش آزمایش

۱.۴ تعیین ثابت فنر

مطابق شکل فنر را از میله کوتاه قلاب‌دار آویزان کنید.

طول طبیعی فنر را اندازه‌گیری کنید. وزنه‌های مختلف را از آن آویزان کرده و افزایش طول فنر را در جدول ۱ یادداشت کنید. مراقب باشید تا فنر بیش از حد کشیده نشود.

با استفاده از جدول ۱ نمودار نیرو بر حسب افزایش طول فنر را با اسفاده از روش کمترین مربعات رسم کنید.

۲.۴ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌ها

۱.۲.۴ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌ها با شمارش تعداد نوسان‌های هر آونگ

مطابق شکل ۳ آونگ‌ها را از تکیه‌گاه آن‌ها آویزان کنید.

دقت کنید که طول آونگ‌ها یکسان باشد. علاوه بر آن فاصله تکیه‌گاه تا سطح میز برابر باشد.

گیرنده‌های پلاستیکی فنر را روی میله‌های آونگ متصل کنید.

برای به نوسان درآوردن آونگ‌ها، با نوک انگشت خود میله آونگ را به صورت تناوبی هل دهید تا دامنه آونگ به اندازه دلخواه برسد. با این کار آونگ روی خط مستقیم نوسان می‌کند و حرکات اعجاب‌انگیز انجام نخواهد داد. علاوه بر این مراقب باشید دامنه آونگ زیاد نباشد تا وزنه آونگ‌ها به یکدیگر اصابت کنند. سرمایه ملی از بین می‌رود.

یکی از آونگ‌ها را به نوسان درآورده و زمان برای ۲۰ نوسان را اندازه‌گیری کنید و با استفاده از آن زمان تناوب آونگ را بدست آورید. آزمایش را برای آونگ دیگر تکرار کرده و جدول ۲ را کامل کنید.

۲.۲.۴ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌ها با بدست آوردن تبدیل فوریه

مطابق شکل ۴ و ۵ از خروجی DC متغیر منبع تغذیه به هر آونگ دو سیم مثبت و منفی را وصل کنید. با دو سیم دیگر هر آونگ را به دستگاه کبرا۳ متصل کنید.

می‌توان از خازن‌ها برای کاهش نویز استفاده کرد، برای اینکار خازن را بین هر ورودی دستگاه کبرا ۳ وصل کنید. دقت کنید تا مثبت و منفی مدار (خصوصا خازن‌ها در شکل ۶) را به صورت صحیح وصل کرده باشید.

ولتآژ منبع تغذیه را روی ۱۰ ولت تنظیم کنید. کنترل کنید که محدودیت جبران باعث افت ولتاژ نشود.

پنج تنظیم هر آونگ را در وسط قرار دهید.

کابل USB را به کامپیوتر وصل کرده و برنامه Measure را اجرا کنید. دستگاه کبرا۳ مکان هر دو آونگ U_1 و U_2 را هر ۴ ثانیه ثبت می‌کند و با استفادهخ از برنامه Measure می‌توان نمودار مکان آونگ‌ها بر حسب زمان را رسم کرد.

از نوار بالا روی Gauge کلیک کرده و گزینه Universal Writer را انتخاب کنید. صفحه‌ای مانند شکل ۷ باز خواهد شد. پارامترهای این صفحه را درست مانند شکل ۷ تنظیم کنید. آونگ‌ها را به نوسان درآورید و روی گزینه Continue کلیک کنید تا پنجره اندازه‌گیری باز شود. در صورت حرکت هر کدام از آونگ‌ها نمودار مکان بر حسب زمان آن‌ها رسم خواهد شد. برای هر اندازه‌گیری حدقل ۳ دقیقه داده بگیرید.

گزینه Channel Modification را از نوار بالای برنامه انتخاب کنید. پنجره‌ای مانند شکل ۸ باز خواهد شد. در این پنجره واحدهای نمودار را از میلی‌ثانیه به ثانیه تبدیل می‌کنیم تا نمودارهای قابل فهم‌تری داشته باشیم. پارامترها را دقیقا مانند شکل ۸ تنظیم کرده و روی Calculate کلیک کنید. بعد از هر اندازه‌گیری واحد نمودار را از میلی‌ثانیه به ثانیه تبدیل کنید.

گزینه Fourier Analysis را از نوار بالای برنامه انتخاب کنید. پنجره‌ای مانند شکل ۹ باز خواهد شد. در این پنجره تبدیل فوریه نمودار به بدست می‌آوریم. پارامترها را دقیقا مانند شکل ۹ تنظیم کرده و روی OK کلیک کنید، بعد از کمی صبر و حوصله تبدیل فوریه گرفته خواهد شد. نتیجه کار مانند شکل ۱۰ می‌گردد. اگر شکلتان به این تمیزی نیست، باید زمان بیش‌تری داده‌گیری کنید.

برای تنظیم بازه اعداد محور افقی یا عمودی روی نمودار دکمه سمت راست موس کلیک کنید و گزینه Display option را انتخاب کنید. سپس در زیر پنجره x_{Data} مقدار Displayed Area را تغییر دهید. برای مثال در شکل ۱۰ مقدار Displayed Area بین ۳.۰ و ۶۵.۰ هرتز تنظیم شده است.

با استفاده از گزینه Survey می‌توانید دو نقطه بر روی نمودار بگذارید و مختصات این دو نقطه به همراه اختلاف‌شان در گوشه سمت راست (شکل ۱۰) نشان داده می‌شود. با توجه به شکل بسامد آونگ ۴۸۹.۰ هرتز است.

بسامد بدست آمده ν_0 را یادداشت کنید و نمودار تبدیل فوریه را ذخیره کنید.

۳.۲.۴ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌های جفت شده (هم‌فاز)

فنر را بین دو آونگ متصل کنید. فنر باید به گیره‌های پلاستیکی روی میله آونگ متصل شود. مطمئن شوید این گیرنده‌ها در فاصله مساوی از تکیه‌گاه هستدن. این فاصله را که l است یادداشت کنید.

آونگ‌ها را به صورت هم‌فاز به نوسان درآورید. یعنی آونگ‌ها با یکدیگر به سمت راست و یکدیگر به سمت چپ بروند. نوسان باید به همین صورت باقی بماند و اختلاف فازی بین دو آونگ ایجاد نگردد.

مانند قسمت قبل تبدیل فوریه نوسان را بدست آورید و نمودار را ذخیره کنید.

۴.۲.۴ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌های جفت شده (با فاز مخالف)

بدون جابجایی فنر، آونگ‌ها را مخالف یکدیگر نوسان دهید. یعنی آونگ‌ها یا از هم دور می‌شوند یا به یکدیگر نزدیک می‌شوند.
مانند قسمت قبل تبدیل فوریه نوسان را بدست آورید و نمودار را ذخیره کنید.
با اندازه‌گیری طول های l، L و به ازای $m = 1kg$ بسامد ν_c را بدست آورید.

۵.۲.۴ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌های جفت شده (زنش آونگ‌ها)

بدون جابجایی فنر، یک آونگ را ثابت نگه داشته و آونگ دیگر را به نوسان دربیاورید.
مانند قسمت قبل تبدیل فوریه نوسان را بدست آورید و نمودا را ذخیره کنید.
با استفاده از نمودار بسامد حرکت را به دست آورید. در تبدیل فوریه دو بسامد ν_0 و ν_c دارای پیک هستند. بسامد این دو نقطه را یادداشت کرده و با مقدار نظری مقایسه کنید.

۶.۲.۴ بستگی بسامدها به فاصله محل اتصال فنر تا تکیه‌گاه

محل اتصال فنر به آونگ‌ها را در فاصله‌های مختلف از تکیه‌گاه قرار دهید. آونگ‌ها را در حالت زنش گذاشته و بسامدهای ν_c و ν_0 را بدست آورید. نتایج را در جدول ۳ نوشته و جدول را کامل کنید.

۵ جدول داده‌ها

جدول ۱: تغییرات افزایش طول فنر با تغییر وزنه آویزان شده

50	40	30	20	10	0	$M(gr)$
16.2	13.0	9.7	6.3	3.2	0	$\Delta(cm)$
0.490	0.392	0.294	0.196	0.098	0	$F(N)$

جدول ۲: زمان تناوب آونگ ۱ و ۲

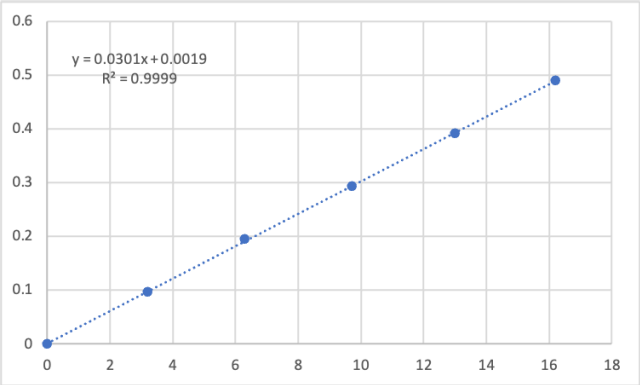
$\nu_0(Hz)$	$T_0(s)$	$T_2(s)$	$T_1(s)$
0.492	2.03175	2.0335	2.030

جدول ۳: کمیت‌های اندازه‌گیرس شده حاصل از تغییرات فاصله اتصال فنر l

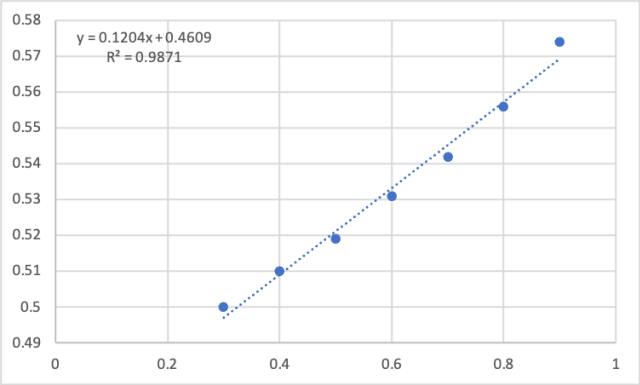
T_2	ν_2	T_1	ν_1	$T_c(s)$	$v_c(s^{-1})$	$v_0(s^{-1})$	$l(m)$
2.020	0.495	166.667	0.006	2.000	0.500	0.489	0.3
2.004	0.499	90.909	0.011	1.961	0.510	0.488	0.4
1.980	0.505	71.429	0.014	1.927	0.519	0.491	0.5
1.953	0.512	50.000	0.020	1.883	0.531	0.492	0.6
1.942	0.515	37.037	0.027	1.845	0.542	0.488	0.7
1.912	0.523	30.303	0.033	1.799	0.556	0.490	0.8
1.880	0.532	23.810	0.042	1.742	0.574	0.490	0.9

۶ نمودار داده‌ها

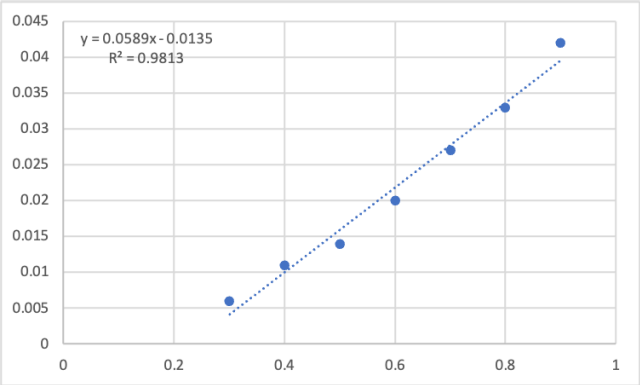
شکل ۱: نمودار جدول ۱



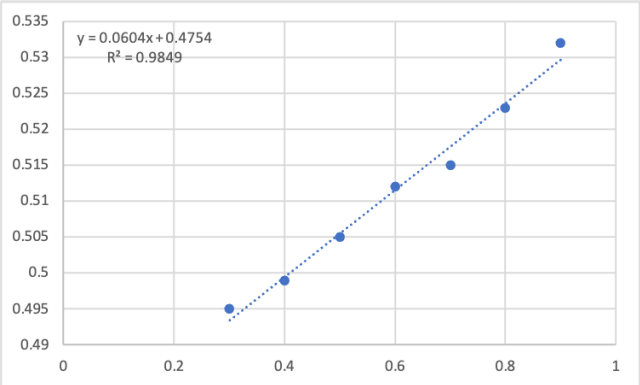
شکل ۲: نمودار جدول ۲ (ν_c)



شکل ۳: نمودار جدول ۲ (ν_1)



شکل ۴: نمودار جدول ۲ (ν_2)



۷ نتیجه‌گیری

۱.۷ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌ها

با تبدیل فوریه این مقدار ۴۹۰.۰ بدست آمده که تقریبا همان مقدار ν_0 جدول است و خطای نسبی نیم‌درصی داریم.

۲.۷ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌های جفت شده (هم‌فاز)

مقدار خوانده شده از نمودار و بسط فوریه: $\nu = 0.490Hz$.
مقدار نظری (دقت کنید که مقدار طول آونگ را $L = 106cm$ را اندازه گرفتیم):

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{L}} = 0.484Hz \qquad (۱۹)$$

که حدود ۲۲.۱ درصد خطا داریم.

۳.۷ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌های جفت شده (با فاز مخالف)

مقدار خوانده شده از نمودار و بسط فوریه: $\nu'_c = 0.507$
مقدار نظری

$$\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 + 2\frac{D_F l^2}{mL^2}} \tag{۲۰}$$

و

$$\nu_c = \sqrt{\nu_0^2 + 2\frac{D_F l^2}{4\pi^2 mL^2}} = 0.504 \tag{۲۱}$$

بنابراین خطا در حدود ۰۵۹.۰ درصد است.

۴.۷ اندازه‌گیری زمان تناوب آونگ‌های جفت شده (زنش آونگ‌ها)

مقدارهای تئوری را که در قسمت‌های قبلی بدست آوردیم از روی نمودار هم دو عدد زیر را برای فرکانس‌ها داریم:

$$\nu = 0.488Hz, \quad \nu''_c = 0.505Hz \tag{۲۲}$$

که خطاها را داریم به ترتیب ۰۳۹.۰ و ۰۸۳.۰ است.

۵.۷ بستگی ثابت جفت‌شدگی به بسامدها

ثابت جفت‌شدگی در حالت $l = 0.5m$:

$$K = \frac{D_F l^2}{mgL + D_F l^2} = 0.067622 \tag{۲۳}$$

ثابت جفت‌شدگی بر حسب ωها:

$$K = \frac{\omega_c^2 - \omega_0^2}{\omega_c^2 + \omega_0^2} = 0.055403 \tag{۲۴}$$

خطای نسبی آن‌گاه ۰۷.۱۸ درصد است.
حال در حالت جفت‌شدگی ضعیف داریم:

$$K = \frac{\omega_c - \omega_0}{\omega_c} = 0.053950 \tag{۲۵}$$

خطای نسبی نیز ۲۲.۲۰ درصد است.